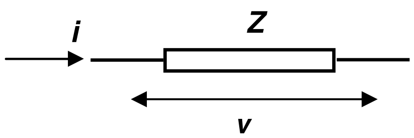
CIRCUITOS ELÉCTRICOS
(apuntes para el curso de Electrónica)

Los circuitos eléctricos están compuestos por:
fuentes de energía: generadores de tensión y generadores de corriente y
elementos pasivos: resistores, inductores y capacitores.

Los elementos pasivos están caracterizados por la relación entre la diferencia de potencial (tensión) **aplicada** entre sus extremos y la corriente que circula, o por la diferencia de potencial que aparece cuando **se hace circular** por el mismo una corriente.



$$Z = \frac{v}{i}$$

donde *Z* es independiente de *i* y de *v*

de manera que
si conectamos entre sus terminales un **generador de tensión** v circulará una corriente i tal que

$$i = v/Z\ ,$$

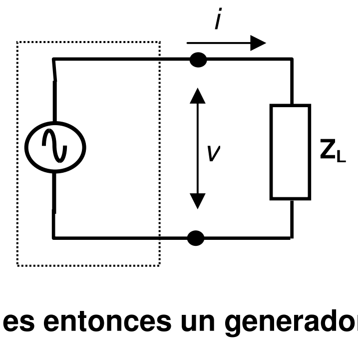
y
si conectamos un **generador de corriente** i aparecerá entre los terminales de Z una tensión v

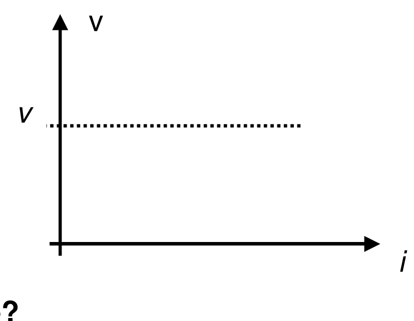
$$v = i \cdot Z\ .$$

¿Cómo se "define" un generador de tensión?

La definición *doméstica* sería: es una fuente de energía que impone entre sus terminales una cierta diferencia de potencial (voltaje o mejor: tensión). La definición rigurosa debería agregar (al menos) que "el valor de esa tensión es **independiente** de los elementos pasivos que el generador tenga conectados entre sus extremos", representados en general por Z_L.

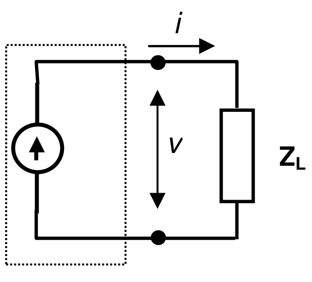
$\mathbf{Z_L}$ representa la denominada "*carga*" (load) a la cual el generador entrega su energía.

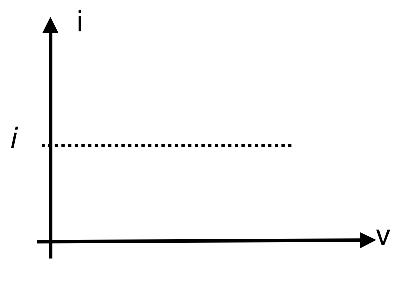




¿Qué es entonces un generador de corriente?

Permutando adecuadamente las palabras tensión y corriente resulta:
Un generador de corriente es aquel que hace circular una corriente que es **independiente** de la "carga" que tenga conectada entre sus terminales, representada también por Z_L.

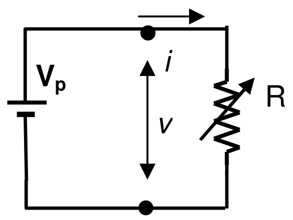


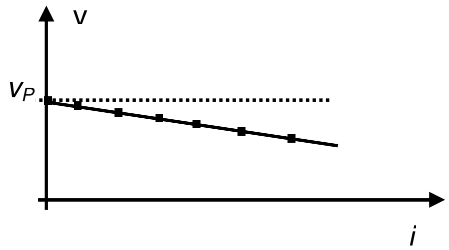


Para comprender el sentido de estas definiciones es necesario estudiar el comportamiento del circuito correspondiente al generador de tensión mostrado arriba.
Para ello utilizaremos algúna fuente de energía disponible, por ejemplo una batería de 9 volts y una resistencia variable de valor adecuado.

Ejercicio 1:
Discutir qué significa "valor adecuado".

Variando R obtendremos un conjunto de pares v,i que representamos





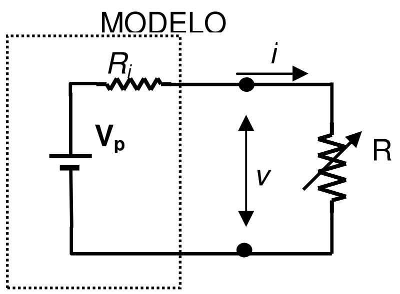
Se observa que los valores medidos se apartan de la definición antes hecha para un generador de tensión, salvo para *i* = 0. (lo mismo ocurrirá con cualquier otro tipo de fuente de energía que utilicemos para nuestro experimento).

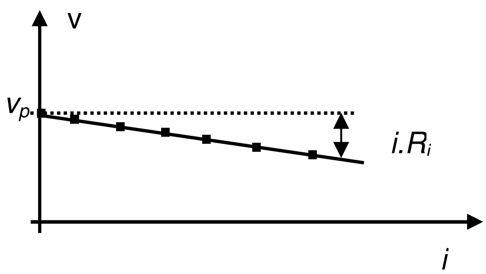
Para salvar la situación diremos que las "definiciones" anteriores corresponden a elementos IDEALES, es decir a un *GENERADOR DE TENSIÓN IDEAL* y (como veremos luego) a un GENERADOR DE CORRIENTE IDEAL.

¿Porqué son útiles estas definiciones?

Si al circuito esquemático de nuestro experimento le agregamos una resistencia R_i, la expresión de v resulta:

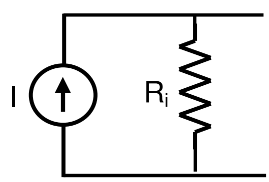
$$v = V_p - i \cdot R_i$$



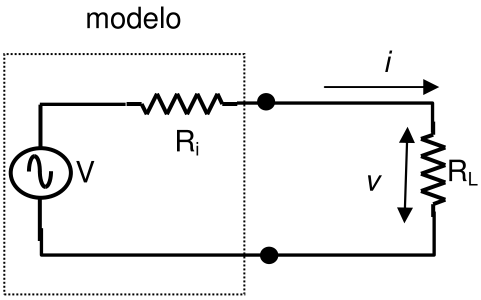


La expresión analítica reproduce ahora los resultados del experimento. Entonces hemos encontrado un MODELO que describe el comportamiento de nuestra batería, en términos de un GENERADOR DE TENSIÓN IDEAL (que cumple con la definición) y de un elemento pasivo, R_i, que se incorpora como un elemento más al circuito.

Ejercicio 2:
Repetir (paso por paso) el razonamiento que lleva a concluir que el MODELO de un generador de corriente, consiste en un GENERADOR DE CORRIENTE IDEAL y su R_i conectados como indica la figura:



Ejercicio 3 (asegúrese de entenderlo):
Siendo V un generador ideal de tensión, ¿Qué tipo de generador está representado por el modelo indicado en la figura?



$$v = i \cdot R_L = \frac{V}{R_i + R_L} \cdot R_L \qquad (1)$$

$$i = \frac{V}{R_i + R_L} \qquad (2)$$

Si en (1) hacemos $R_i << R_L$

$$v = \frac{V}{R_L} \cdot R_L = V$$ expresión que cumple con la definición de generador de tensión.

Si en (2) hacemos $R_i >> R_L$

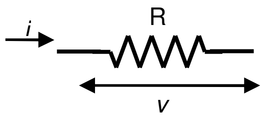
$$i = \frac{V}{R_i}$$ expresión que cumple con la definición de generador de corriente.

Podemos concluir que: un generador será un "generador de tensión" cuando su "resistencia interna" R_i sea mucho menor que la "resistencia de carga" R_l. El generador ideal es aquel para el cual esa condición se cumple para cualquier valor de R_L o sea $R_i = 0$.

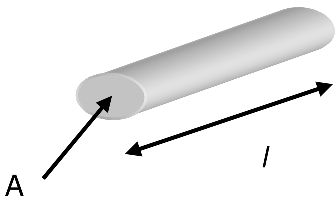
Ejercicio 4:
¿ y para un generador de corriente?

ELEMENTOS PASIVOS

Resistores



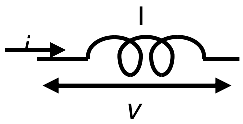
$$R = \frac{\rho \cdot l}{A}$$



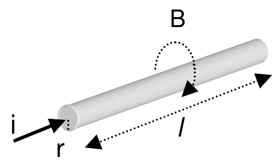
ρ: resistividad eléctrica, es una propiedad intrínseca del material.
l y A son parámetros geométricos.

$$v = i \cdot R$$

Inductores
La inductancia da cuenta de la interacción entre la corriente en un conductor y el campo magnético que ella misma genera y es debida a las fuerzas producidas por el campo magnético sobre las cargas en movimiento (la fuerza es propocional al producto vectorial entre la velocidad de las cargas y el campo), por lo que el valor de L tiene componentes geométricas, depende además de las propiedades magnéticas del medio (μ).



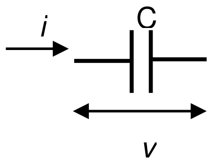
$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{2l}{r} - 1 + \frac{\mu_c}{4\pi}\right)$$

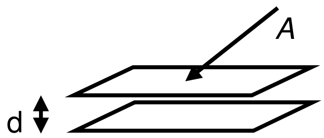


$$v = L \cdot \frac{\partial i}{\partial t}$$

Cuando la interacción se produce sobre un circuito debido al campo producido por la corriente en otro circuito, al elemento se lo llama inductancia mutua y se dice que ambos circuitos están magnéticamente acoplados.

Capacitores
Entre dos conductores a los que se aplica una diferencia de potencial V se genera un campo eléctrico E= V/d. La cantidad de carga almacenada es Q = C . V
El factor de proporcionalidad C depende tanto de características geométricas como de las propiedades dieléctricas del medio (ε) que separa los conductores.





$$C = \frac{\varepsilon \cdot A}{d}$$

$$i = \frac{\partial Q}{\partial t} = C \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \qquad v = \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt$$

CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Como dijimos los circuitos están compuestos por las fuentes de energía, representadas por medio de generadores de tensión y generadores de corriente y los elementos "pasivos" R, L y C. Los conductores que interconectan los componentes, son un caso particular de elemento pasivo con R=0 y L=0.
Si consideramos a R, L y C parámetros constantes (independientes de v e i) los circuitos así formados serán circuitos **lineales.** Esta es una propiedad muy importante pues permite la aplicación del **principio de superposición** al momento de "resolver" un circuito.
Resolver un circuito significa encontrar las corrientes en todas sus ramas y la "tensiones" (potenciales en todos sus nodos).

<u>Nota:</u> cuando decimos "tensiones" (mejor que "voltajes") en los nodos estamos señalando que existe un "nodo de referencia" respecto del cual se miden todos las diferencias de potencial. A este nodo se lo suele llamar "común" o "tierra". Esto merecerá después alguna ampliación, por ahora el terminal de "tierra" o común de un circuito es aquél respecto del cual se miden todas las demás diferencias de potencial.

El método clásico para resolver un circuito consiste en aplicarle las "reglas de Kirchoff":

- Suma de corrientes en un nodo igual a 0.
- Suma de tensiones en una malla cerrada igual a 0.

Se obtiene así un sistema de ecuaciones linealmente independientes, donde las incógnitas son las corrientes y las tensiones.
Dado que, en general nuestra aplicación será encontrar el valor de la corriente y/o tensión en algún punto de interés del circuito presentaremos a continuación algunos métodos simplificados.
<u>Nota:</u> en última instancia la aplicación de las reglas de Kirchoff siempre nos llevaran a la solución.

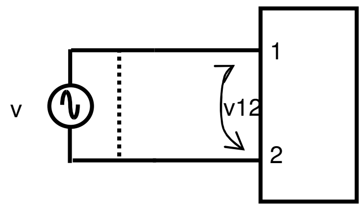
Aplicación del principio de superposición:

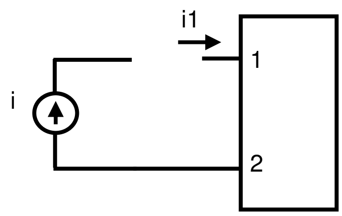
Cuando en un circuito hay más de un generador (de tensión y/o de corriente) el efecto sobre alguna variable del circuito (tensión o corriente) será la superposición (suma algebraica) de la acción de cada uno de ellos tomados por separado.
El punto importante es cómo "desconectar" a los restantes generadores o más precisamente: cómo eliminar el efecto que esos generadores tienen sobre el circuito. A esta acción la llamaremos "pasivar" el generador. (Esta discusión es un buen ejemplo de la utilidad de las definiciones y modelos presentados antes).

Como ya dijimos cualquier generador puede ser representado como un generador ideal y su resistencia (impedancia) interna, la que pasa a ser considerada un elemento más del circuito.
Entonces ¿cómo pasivar un generador ideal?

Si v es un generador de tensión ideal conectado entre los nodos 1 y 2, el único mecanismo de asegurar que v12 = 0 es poniendo un cortocircuito (un conductor con resistencia nula) entre esos nodos. Por supuesto que por ese conductor circulará una corriente infinita, pero eso no es un inconveniente para un generador ideal. (discutir casos reales).

En el caso de un generador de corriente ideal i, es necesario abrir el circuito para asegurar que la corriente que entra al nodo 1 sea igual a cero. Como resultado de eso la diferencia de potencial entre los extremos del generador será infinita, pero eso no es un inconveniente para un generador ideal. (discutir casos reales).

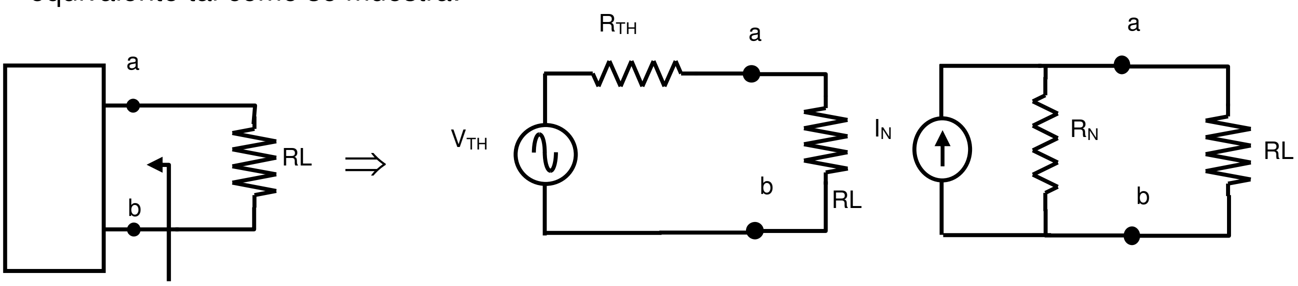




En resumen: un generador ideal de tensión se pasiva poniendo sus terminales en cortocircuito y un generador de corriente ideal dejando sus terminales en circuito abierto. Las correspondientes resistencias internas de los generadores reales pasaron a formar parte del resto del circuito.

Teoremas de Thevenin y Norton:

Permiten modelar el comportamiento de una red "vista" desde un par de nodos por un circuito equivalente tal como se muestra:



Equivalente Thevenin

Equivalente Norton

Como ejemplo de la utilidad de estas representaciones supongamos que queremos determinar la corriente que circula por R_L para distintos valores de ese elemento.

Todos los elementos constantes del circuito se agrupan y se reemplazan por su equivalente, conV_{TH} y R_{TH}. Queda entonces una única malla (una única ecuación) que contiene al elemento variable.

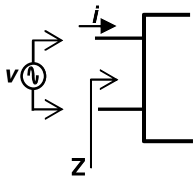
El teorema de Thevenin dice que la tensión equivalente V_{TH} entre los terminales a y b se calcula dejando esos terminales “a circuito abierto” (no entra ni sale corriente), en nuestro caso quitando RL.
La resistencia (impedancia) equivalente de Thevenin R_{TH} es la que se mediría “mirando” hacia el circuito previamente pasivado.

El teorema de Norton establece que la corriente equivalente I_N es la corriente que circularía por un cortocircuito entre a y b. La resistencia (impedancia) equivalente de Norton R_N se calcula de la misma manera que R_{TH}.

Impedancia (resistencia) equivalente

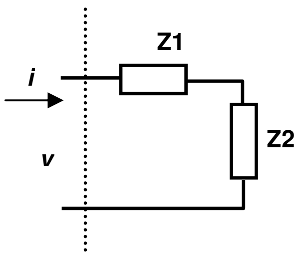
La impedancia entre dos nodos cualesquiera de un circuito que no contiene generadores independientes (esto deberá ser aclarado) es la relación entre la tensión aplicada y la corriente que circula debido a esa tensión.
En general:

$$Z = \frac{v}{i}$$



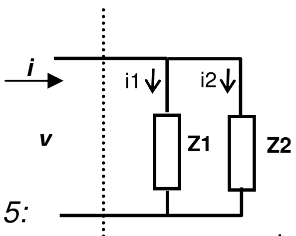
Nótese que esta generalización incluye a la caracterización que antes usamos para definir los “elementos pasivos”
Como ejemplo, los casos más conocidos:

Elementos “en serie”



$$v = i \cdot Z1 + i \cdot Z2 \quad \therefore \quad \frac{v}{i} = Z = Z1 + Z2$$

Elementos “en paralelo”



$$i = i1 + 12 = \frac{v}{Z1} + \frac{v}{Z2} \quad \therefore \quad \frac{i}{v} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{Z1} + \frac{1}{Z2}$$

o

$$Z = \frac{v}{i} = \frac{Z1.Z2}{Z1 + Z2}$$

Ejercicio 5:
Definir con precisión el significado de “en serie” y “en paralelo”

GENERADORES:

Los generadores pueden ser continuos [V] (pilas, baterías) o variables en el tiempo [v(t)]. Sabemos que cualquier magnitud (en nuestro caso tensión o corriente) que varíe en el tiempo en forma periódica puede ser desarrollada en sus componentes armónicos (senos y cosenos) por lo que el comportamiento de un circuito **lineal** ante una excitación arbitraria podrá ser analizado como la superposición de las componentes armónicas de esa excitación. Con esta condición es suficiente conocer el comportamiento del circuito a generadores de la forma

$$v(t)=Vp.\cos(\omega.t)$$

<u>Nota:</u> Las máquinas generadoras de energía para la red eléctrica pública, producen naturalmente tensión con una variación sinusoidal).

Analicemos el comportamiento de los elementos circuitales ya definidos. R, L y C para un generador variable como $v(t)=Vp.\cos(\omega.t)$

Para una **resistencia** de la relación $v = i.R$, resulta

$$i(t)=\frac{1}{R}\cdot Vp\cos(\omega t)=\frac{Vp}{R}.\cos(\omega t)$$

La corriente tiene también una variación sinusoidal con un valor máximo $Ip = Vp/R$

Para un **inductor**, a partir de $v = L\,\partial i/\partial t$ resulta:

$$i(t)=\frac{1}{L}\int Vp.\cos(\omega t).dt=\frac{Vp}{\omega L}.\text{sen}(\omega t)$$

$$i(t)=\frac{Vp}{\omega L}.\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$$

La corriente tiene la misma variación sinusoidall (cos) que la tensión, con un valor máximo $Ip = Vp/\omega L$ y un "atraso en la fase" respecto de la tensión de $\pi/2$.

Finalmente para un **capacitor**, de $v=\frac{1}{C}\int i dt$ resulta:

$$i(t)=C.\frac{\partial(Vp\cos\omega t)}{\partial t}=\omega C.Vp.(-\text{sen}\,\omega t)$$

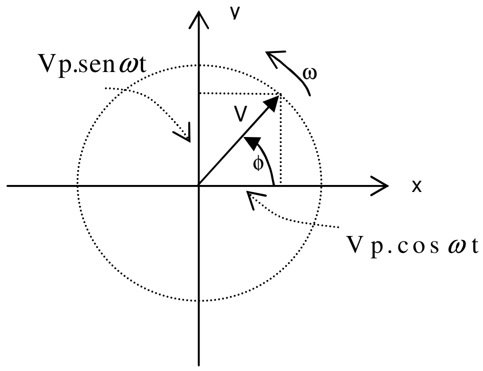
$$i(t)=\frac{Vp}{\frac{1}{\omega C}}.\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$$

Igual que antes la corriente tiene una variación sinusoidal pero con un cambio de fase de $\pi/2$, en este caso en "adelanto".

Entonces para describir la corriente en un circuito que contiene, además de resistores inductores y/o capacitores es necesario conocer además del valor máximo, el corrimiento de fase respecto de la tensión aplicada.

El método ya presentado en cursos anteriores consiste en utilizar una representación "fasorial". Los fasores son segmentos de recta, cuya **longitud** es proporcional a la magnitud (valor máximo) y su **orientación** (dirección y sentido) respecto de alguna referencia arbitraria, la fase relativa a ella.

Así una señal de la forma: $\mathrm{Vp.cos}(\omega t)$ puede representarse como la proyección, en coordenadas cartesianas de un segmento de magnitud Vp rotando con velocidad angular ω alrededor del origen (radiovector).
Si la posición del radiovector indicada en la figura corresponde a t=0, las expresiones resultan:



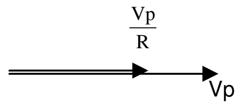
$$v_x(t) = \mathrm{Vp.cos}(\omega t + \phi)$$
$$v_y(t) = \mathrm{Vp.sen}(\omega t + \phi)$$

Entonces si: $v(t) = \mathrm{Vp.cos}(\omega t + 0)$

las relaciones entre v e i para los resistores, inductores y capacitores lucirán de la siguiente manera:

para R:

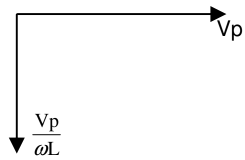
$$i = \frac{Vp}{R}\cdot\cos(\omega t + 0)$$



$$\frac{Vp}{Ip} = R$$

para L

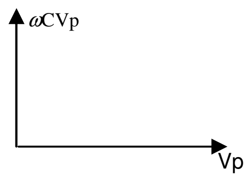
$$i = \frac{Vp}{\omega L}\cdot\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$



$$\frac{Vp}{Ip} = \omega L$$

para C

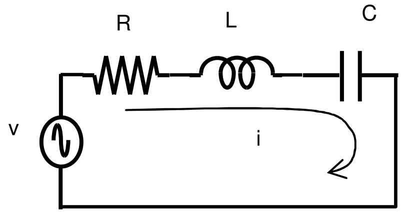
$$i = \omega C Vp\cdot\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

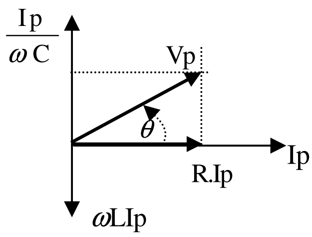


$$\frac{Vp}{Ip} = \frac{1}{\omega C}$$

La relación Vp/Ip es la “magnitud” de la impedancia de los respectivos elementos.
Para el caso de generadores “continuos” (independientes del tiempo), bastará con hacer ω=0 en las expresiones anteriores.

Ejemplo:
Como aplicación de lo visto calculemos la relación i v en el circuito de la figura





Dado que hay una sola malla tomamos la corriente como como referencia y trazamos el diagrama fasorial

(La ecuación de la malla es:) $v = Ri + L\frac{\partial i}{\partial t} + \frac{1}{C}\int idt$

Del diagrama se determinan:

$$Vp = Ip.\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}$$

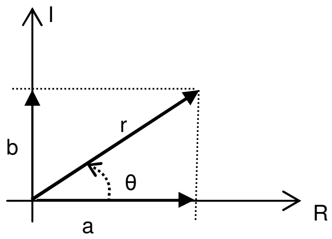
$$Z = \frac{Vp}{Ip} = \sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}$$

$$tg\,\theta = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

De esta forma se obtienen las expresiones para la magnitud y la fase de la impedancia. verifique que estas expresiones coinciden con las obtenidas en forma individual para cada uno de los componentes.

Presentaremos ahora un método más elegante para el análisis de circuitos con con generadores con variación armónica.

Previamente recordemos que un número complejo N= a + jb puede escribirse como:



$$N = r(\cos\theta + jsen\theta)$$

con

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \text{arctg}\frac{b}{a}$$

$r \cdot \cos\theta$ y $r \cdot sen\theta$

son respectivamente la parte real (Re N) y la parte imaginaria (Im N) de N.

El módulo de N es: $$r = \sqrt{(\mathrm{Re}\,N)^2 + (\mathrm{Im}\,N)^2}$$

y la fase relativa: $$\theta = arctg\frac{\mathrm{Im}\,N}{\mathrm{Re}\,N}$$

Aplicando el teorema de Euler podemos escribir:

$$N = r(\cos\theta + jsen\theta) = r \cdot e^{j\theta}$$

y si $$\theta = \omega t + \phi$$

el número complejo $r \cdot e^{j(\omega t+\phi)}$

representa un vector girando con velocidad angular ω alrededor del origen del plano complejo, donde Φ indica la posición inicial (t=0) Escribiendo:

$$r \cdot e^{j(\omega t+\phi)} = \left(re^{j\phi}\right) \cdot e^{j\omega t} = R \cdot e^{j\omega t}$$

resulta evidente la relación con la representación fasorial antes vista, donde la expresión entre paréntesis corresponde a la magnitud del fasor rotante. Ahora tenemos una representación más precisa: “un número complejo”,totalmente determinado a partir de sus componentes real e imaginaria (o su módulo y fase).

Con esto podemos escribir la excitación senoidal como:

$$v = Vp\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left(Vp \cdot e^{j\omega t}\right)$$

que aplicada a un circuito dará lugar a una corriente de la misma forma:

$$i = Ip\cos(\omega t + \phi) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{I}\,pe^{j\phi} \cdot e^{j\omega t}\right)$$

Pero dado que estamos tratando con circuitos lineales podemos usar directamente:

$$v = Vp.e^{j\omega t}$$

ya que

$$Vp.e^{j\omega t} = \mathrm{Re}\left(Vp.e^{j\omega t}\right) + \mathrm{Im}\left(Vp.e^{j\omega t}\right)$$

La solución del circuito será la superposición de las soluciones para cada una de las componentes. (la parte real de la solución corresponderá a los términos dependientes de la parte real de la excitación.

La forma exponencial de escribir la excitación (generadores) de los circuitos tiene importantes ventajas operativas, en particular la ecuación diferencial del circuito RLC del ejemplo anterior, se transforma en una ecuación algebraica de fácil solución.

Ejercicio 6:
Obtenerla y resolverla.

IMPEDANCIA COMPLEJA:
(el formalismo).

Si a un elemento pasivo le aplicamos una tensión $\mathrm{v} = \mathrm{V_p e^{j0}} \cdot \mathrm{e}^{j\omega t} = \mathrm{V^* e}^{j\omega t}$, circulará una corriente de la forma $\mathrm{i} = \mathrm{I_p e}^{j\phi} \cdot \mathrm{e}^{j\omega t} = \mathrm{I}^* \cdot \mathrm{e}^{j\omega t}$

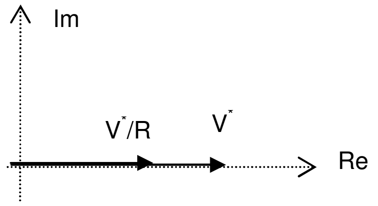
La relación $\frac{\mathrm{V}^*}{\mathrm{I}^*}$ es la llamada “impedancia compleja”.

Para comprender las ventajas operativas de esta definición, resolvamos nuevamente las relaciones v – i para los distintos componentes pasivos:

para R:

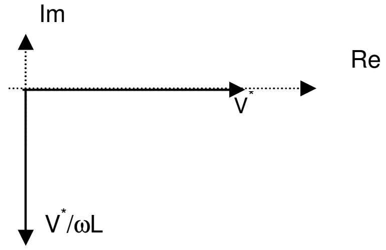
$$\mathrm{i} = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{R}} \Rightarrow \qquad \mathrm{I^* e}^{j\omega t} = \frac{\mathrm{V^* e}^{j\omega t}}{\mathrm{R}}$$

$$\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{V}^*}{\mathrm{I}^*} = \mathrm{R}$$



para L

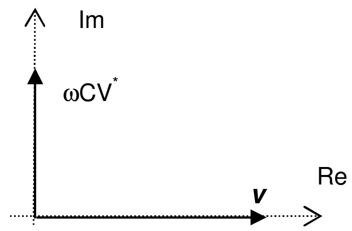
$$i=\frac{1}{L}\int v\,dt \;\Rightarrow\; I^{*}e^{j\omega t}=\frac{1}{L}\int V^{*}e^{j\omega t}dt$$



$$Z=\frac{V^{*}}{I^{*}}=j\omega L$$

para C

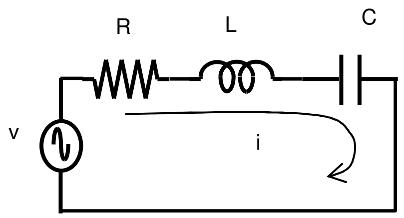
$$i=C\frac{\partial v}{\partial t} \;\Rightarrow\; I^{*}e^{j\omega t}=C\frac{\partial\left(V^{*}e^{j\omega t}\right)}{\partial t}$$



$$Z=\frac{V^{*}}{I^{*}}=\frac{1}{j\omega C}=-j\frac{1}{\omega C}$$

La impedancia es ahora un número complejo que contiene información de módulo y fase relativa.

Operativamente entonces el circuito del ejemplo se resolvería de la siguiente manera:



$$v=iR+iZ_L+iZ_C=i\left(R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}\right).$$

…lo que falta es conocido…

Ejercicio 7:

Encontrar la expresión del módulo de la impedancia y de la fase relativa entre la tensión y la corriente.